

Зміст

Передмова	7
Від автора	8
Структура підручника	10
Вступ.....	12
1. Предмет і завдання математичної картографії.....	12
2. Короткий історичний нарис розвитку картографії і математичного обґрунтування карт.....	13
Розділ 1. Загальні відомості про фігуру Землі, її поверхню та спотворення, які виникають унаслідок її зображення. Загальні питання теорії математичної картографії.....	23
1.1. Фігура Землі та її математична поверхня	23
1.2. Координати точок поверхні еліпсоїда і кулі	26
1.3. Картографічна проєкція і картографічна сітка.....	29
1.4. Поняття про спотворення, що виникають унаслідок зображення поверхні Землі математичної на площині.....	30
1.5. Зображення азимута напрямку в проєкції. Кут між меридіаном і паралеллю в зображенні на площині. Умови ортогональності картографічної сітки	33
1.6. Масштаби довжин: уздовж довільного напрямку та вздовж меридіана і паралелі	37
1.7. Поняття про екстремальні масштаби довжин. Головні напрямки. Еліпс спотворень і його орієнтування	40
1.8. Частинний масштаб площі.....	47
1.9. Спотворення кутів. Найбільше спотворення кута	48
1.10. Зображення поверхні еліпсоїда (кулі) на площині. Умови зображення	51
1.10.1. Рівнокутове зображення.....	51
1.10.2. Рівноплощове зображення	52
1.10.3. Довільне зображення.....	52
Контрольні питання до розділу 1	53
Розділ 2. Зображення земного еліпсоїда на кулі.....	57
2.1. Загальні положення	57
2.2. Рівнокутове зображення.....	59
2.3. Рівноплощове зображення	61
2.4. Рівнопроміжкове зображення	65
2.4.1. Масштаб уздовж меридіана $m = 1$	65
2.4.2. Масштаб уздовж паралелі $n = 1$	66
Контрольні питання до розділу 2	68
Розділ 3. Картографічні проєкції	70
3.1. Класифікація проєкцій	70
3.1.1. Класифікація проєкцій за характером спотворень	70
Рівнокутові проєкції.....	70
Рівноплощові проєкції.....	70
Довільні проєкції	71
3.1.2. Класифікація проєкцій за виглядом нормальної сітки	72
Циліндричні проєкції	72
Конічні проєкції	73
Азимутні проєкції	74
Псевдоциліндричні проєкції.....	74
Псевдоконічні проєкції.....	75
Псевдоазимутні проєкції	75
Поліконічні проєкції.....	76
Колові проєкції	76
Похідні проєкції.....	77

3.1.3. Класифікація проєкцій за розташуванням допоміжної поверхні.....	77
3.1.4. Класифікація проєкцій за іншими ознаками.....	78
3.2. Скісна і поперечна системи полярних сферичних координат. Визначення координат полюсів і точок земної поверхні в цих системах.....	79
Контрольні питання до розділу 3.....	86
Розділ 4. Циліндричні проєкції.....	87
4.1. Основні поняття. Картографічна сітка. Загальні формули.....	87
4.2. Рівнокутові (конформні) прямі циліндричні проєкції.....	89
4.2.1. Визначення положення ортодроми.....	97
4.2.2. Визначення напрямку ортодроми.....	98
4.2.3. Визначення довжини ортодроми.....	99
4.2.4. Визначення координат проміжних точок ортодроми.....	99
4.3. Рівноплощові (еквівалентні) прямі циліндричні проєкції.....	101
4.3.1. Еквівалентна проєкція Бермана.....	103
4.4. Рівнопроміжкові (еквідистантні) прямі циліндричні проєкції.....	105
4.5. Довільні циліндричні проєкції.....	107
4.6. Скісні та поперечні циліндричні проєкції.....	109
4.6.1. Рівнокутова поперечно-циліндрична проєкція.....	113
4.6.2. Рівноплощова поперечно-циліндрична проєкція.....	115
4.6.3. Поперечна рівнопроміжкова циліндрична проєкція.....	116
4.6.4. Основні відомості про проєкцію Гавсса–Крюгера.....	119
4.6.5. Перспективно-циліндричні проєкції.....	127
4.7. Довільні циліндричні проєкції з наперед заданим розподілом спотворень.....	133
Контрольні питання до розділу 4.....	135
Розділ 5. Конічні проєкції.....	137
5.1. Основні поняття. Картографічна сітка. Загальні формули.....	137
5.2. Прямі рівнокутові (конформні) конічні проєкції.....	139
5.2.1. Проєкція Гавсса–Ламберта.....	148
5.3. Рівноплощові (еквівалентні) прямі конічні проєкції.....	149
5.3.1. Проєкція Альберса.....	154
5.4. Рівнопроміжкові прямі конічні проєкції.....	156
5.4.1. Проєкція Птолемея.....	161
5.4.2. Проєкція Деліля.....	162
5.4.3. Проєкція Ейлера.....	164
5.4.4. Проєкція Вітковського.....	166
5.4.5. Пряма рівнопроміжкова конічна проєкція проф. Ф. Красовського.....	168
Розділ 6. Азимутні проєкції.....	170
6.1. Основні відомості. Картографічна сітка. Загальні формули.....	170
6.2. Рівнокутові азимутні проєкції.....	172
6.3. Рівноплощові (еквівалентні) азимутні проєкції. Проєкція Ламберта.....	174
6.4. Рівнопроміжкові вздовж вертикалів (меридіанів) азимутні проєкції. <i>Проєкція Постеля</i>	176
6.5. Перспективно-азимутні проєкції.....	178
6.6. Гномонічні, стереографічні, ортографічні і зовнішні проєкції.....	179
6.6.1. Гномонічна проєкція.....	179
6.6.2. Стереографічна проєкція.....	181
6.6.3. Ортографічні проєкції.....	183
6.6.4. Зовнішні проєкції.....	184
А. Проєкція Кларка.....	186
Б. Проєкція Лаїра.....	187
В. Проєкції з позитивним зображенням.....	188
Г. Проєкції з негативним проєктуванням.....	189
Д. Проєкції з багатократним проєктуванням.....	190
6.7. Узагальнення і видозмінювання азимутних проєкцій.....	195

<i>А. Проекція Аітова</i>	196
<i>Б. Проекція Аітова–Гаммера</i>	197
6.8. Перспективно-азимутні проєкції еліпсоїда з негативним і позитивним зображеннями	201
Контрольні питання до розділу 6	203
Розділ 7. Псевдоциліндричні, псевдоконічні та псевдоазимутні проєкції	206
7.1. Псевдоциліндричні проєкції	206
7.1.1. Загальні відомості та основні формули	206
7.1.2. Рівноплощові псевдоциліндричні проєкції	209
1. <i>Проекція Еккерта</i>	210
2. <i>Проекція Сансона</i>	213
3. <i>Проекція Каврайського</i>	215
4. <i>Проекція Мольвейде</i>	217
5. <i>Проекція Мольвейде–Гуда</i>	220
7.1.3. Довільні псевдоциліндричні проєкції	223
1. <i>Проекція Каврайського</i>	223
2. <i>Проекція ЦНДІГАіК</i>	227
3. <i>Проекція Урмаєва</i>	228
7.2. Псевдоконічні проєкції	228
7.2.1. Основні відомості та загальні формули	228
7.2.2. Рівноплощові псевдоконічні проєкції	229
<i>Проекція Бонна</i>	231
<i>Серцеподібна проєкція</i>	236
7.3. Псевдоазимутні проєкції	237
Контрольні питання до розділу 7	239
Розділ 8. Поліконічні проєкції	241
8.1. Загальні відомості та формули	241
8.2. Проста поліконічна проєкція	243
8.3. Проста поліконічна проєкція для вузької меридіанної смуги	247
8.4. Довільні поліконічні проєкції, отримані за ескізами їх картографічних сіток	249
8.5. Видозмінна проста поліконічна проєкція. Проекція карти масштабу 1:1000000 і критичні зауваження Ломніцкі стосовно міжнародної карти	259
8.6. Проекція Лаллемана і критичні зауваження Ломніцкі	268
8.7. Проекція Лагранжа	276
8.8. Деякі відомості про загальні поліконічні проєкції	284
Контрольні питання до розділу 8	287
Розділ 9. Колові проєкції	289
9.1. Кульова (глобулярна) проєкція	289
9.2. Проекція Грінтена	293
9.3. Проекції Апіана, Араго, Лоріца, Менделєєва	298
9.3.1. Проекція Апіана	298
9.3.2. Проекція Араго	298
9.3.3. Проекція Лоріца	298
9.3.4. Проекція Менделєєва	299
9.4. Проекція Лагранжа	300
9.5. Коротко про стереографічну проєкцію еліпсоїда	307
Контрольні питання до розділу 9	307
Розділ 10. Похідні проєкції	309
10.1. Проєкції, отримані комбінацією рівнянь вихідних проєкцій. Проєкції Гаммера і Брейзінга	309
10.2. Проєкції, отримані комбінацією сіток вихідних проєкцій	312
10.3. Гомографічне перетворення за методом М. Урмаєва	317
10.4. Пошук картографічних проєкцій	317

10.4.1. Проекції з рівноподіленими паралелями.....	318
10.4.2. Проекція Чебишова.....	324
Контрольні питання до розділу 10.....	328
Розділ 11. Геодезичні проекції.....	330
11.1. Проекція Гавсса–Крюгера.....	330
11.2. Проекція UTM (універсальна поперечно-циліндрична проекція Меркатора).....	338
11.3. Проекція Гавсса–Крюгера для широкої меридіанної смуги.....	338
11.4. Проекція Кассіні–Зольднера.....	342
11.5. Проекція Гавсса–Ламберта.....	345
11.6. Стереографічна проекція.....	347
11.7. Стереографічна проекція Руссіля з видозмінним опрацюванням її професора Л. Грабовскі.....	347
11.8. Проекція Баумана.....	352
11.9. Проекція Схольса.....	353
11.10. Проекція Лаборда.....	354
11.11. Пристосована конформна проекція Каврайського.....	355
11.12. Проекції, одержані за допомогою однорідних гармонічних поліномів.....	356
11.13. Проекція Мюфлінга.....	359
Контрольні питання до розділу 11.....	360
Розділ 12. Підсумкова узагальнювальна частина.....	362
12.1. Топографічні карти, їх розграфлення і номенклатура.....	362
12.2. Вибір картографічної проекції.....	367
12.3. Розпізнавання картографічних проекцій.....	371
12.4. Проекції, які найчастіше використовують в картографії на практиці.....	381
12.5. Проекції навігаційних карт.....	383
12.6. Проекції карти світу масштабу 1:2500000.....	386
Контрольні питання до розділу 12.....	389
Розділ 13. Доповнення. Практична частина.....	392
13.1. Про точність обчислень.....	392
13.2. Дослідження картографічної проекції за виглядом її сітки меридіанів і паралелей та за її рівняннями.....	396
13.3. Дослідження картографічних проекцій за їх рівняннями.....	406
13.4. Обчислення локсодромічного кута, довжини локсодроми і довжини ортодроми.....	420
13.5. Визначення координат рамки аркуша топографічної карти масштабу 1:100000 і побудова її основи.....	422
13.6. Обчислення координат, побудова й оформлення картографічної сітки проекції Меркатора.....	438
13.7. Обчислення координат і побудова картографічної сітки прямої рівнокутової кінчної проекції (розв’язання конкретної задачі).....	449
13.8. Деякі пояснення та рекомендації, що стосуються розв’язання числового прикладу й оформлення його результатів.....	454
13.9. Обчислення координат, побудова й оформлення картографічної сітки гномонічної проекції.....	456
13.10. Стереографічна проекція і графічний спосіб побудови її картографічної сітки.....	468
Контрольні питання до розділу 13.....	472
Список літератури.....	474
Додатки.....	476
Математичні і табличні величини та математичні формули.....	476
1. Математичні величини.....	476
2. Табличні величини.....	477
Математичні формули.....	484
Деякі міри довжини, площі, кутів.....	500

Передмова

Світлої пам'яті Іван Миколайович Гудз, відомий картограф і педагог, все своє життя віддав Львівській політехніці.

Над цим посібником Іван Миколайович працював близько десяти років, вкладаючи в його зміст свої знання предмета, примножені багаторічним педагогічним досвідом. На жаль, через хворобу не зміг видати цю працю, відійшовши у засвіти на 93-му році життя.

Із відзнакою закінчивши у 1950 р. геодезичний факультет Львівської політехніки, з 1952 р. до виходу на пенсію працював в університеті на різних посадах – від асистента до доцента. З вересня 1984 р. до червня 2003 р. працював на кафедрі аерофотогеодезії (пізніше кафедра фотограмметрії та геоінформатики) і викладав практично всі курси картографічного профілю: “Основи картографії”, “Математична картографія”, “Тематична картографія”, “Картознавство”, “Складання, редагування та видання карт”. Упродовж кількох десятиліть активно займався видавничою роботою як відповідальний секретар наукових журналів, які видавала Львівська політехніка.

Глибокі теоретичні знання, тонке розуміння дидактичних прийомів, вміння у доступній формі подати складний теоретичний матеріал (особливо стосовно математичної картографії) – характерні риси Івана Миколайовича як викладача. На його лекціях та методичних напрацюваннях виросло не одне покоління геодезистів, яких навіть важко перерахувати!

Дисципліна “Математична картографія” – доволі складний предмет, в якому використано відомості з математики, вищої геодезії, теорії фігури Землі тощо, а основну увагу зосереджено на теорії картографічних проєкцій. У наш час досягнень комп'ютерних технологій налічується понад 100 прикладних програм для переходу від однієї проєкції до іншої. Але в основу кожного програмного продукту покладено алгоритми математичної картографії й, не знаючи теорії, нелегко раціонально використовувати такі програми для вирішення наукових і прикладних завдань. Безперечно, добре структурована праця доцента І. М. Гудза допоможе читачеві краще орієнтуватись у “лабіринті” картографічних відображень.

Працівники двох кафедр (кафедри фотограмметрії та геоінформатики та кафедри картографії і геопросторового моделювання) доклали усіх зусиль, щоб праця була завершена, та підготували її до видання. На нашу думку, цей навчальний посібник потрібний студентам усіх рівнів навчання, докторантам та викладачам різних закладів освіти України.

О. Л. ДОРОЖИНСЬКИЙ,
професор,
доктор технічних наук

Від автора

Задум написати підручник, який став би корисним студентам під час вивчення математичної картографії – найважливішої за значенням і змістом картографічної дисципліни, – виник ще в роки моєї викладацької праці на геодезичному факультеті Львівської політехніки. Однак зреалізувати цей задум я зміг лише після того, коли перестав працювати в університеті, остаточно ставши емеритом.

Дві причини спонукали мене до здійснення цього задуму: перша – дати студентам змістовний підручник українською мовою з цієї назагал важкої для засвоєння навчальної теоретичної дисципліни; і друга – залишити по собі якийсь слід – свідчення перебування в цьому реальному світі. Хотів також зробити певний внесок у розвиток українського картознавства, зарахувавши його в актив моєї альма-матер – Львівської політехніки, де з 1945 р. я навчався, із 1952 р. працював, набуваючи професійних рис спеціаліста – картографа-геодезиста.

Готуючи текст підручника, крім багаторічного викладацького досвіду у вищій школі, я враховував вагомий доробок з математичної картографії видатних вчених у цій царині знань, вказаних у списку літератури. З поодиноких підручників цього списку запозичено й рисунки картографічних сіток деяких проєкцій.

І хоча з кінця першої половини минулого століття висловлювали думку, що математична картографія в її класичному трактуванні відживає своє, вважаю, що вивчення цієї дисципліни необхідно починати з азів, закладених у минулому, коли геометричний метод був важливим, а навіть інколи і панівним в одержанні картографічних проєкцій. Але водночас у підручнику висвітлено (може, недостатньо) питання, що стосуються сучасної математичної картографії і пов'язані з пошуком нових картографічних проєкцій на основі розв'язання оберненої задачі математичної картографії.

Працюючи над текстом підручника, я усвідомлював велику відповідальність за якість його змісту, але об'єктивну його оцінку може дати вимогливий, проте водночас доброзичливий його читач. Підручник, напевно, має певні недоліки, як мовні, так і методологічні, можливо, є в ньому і певні неточності чи неясно сформульовані вагомні сентенції, за що прошу вибачення у доброзичливого читача. Буду щиро вдячний усім, хто висловить свою критичну думку про якість підручника і зокрема тим, хто помітить його недоліки, які може врахувати хтось (напевно, уже не я), якщо виникне потреба у його перевиданні.

А я, як говорили колись латиняни, “*feci, quod potui, faciant meliora potentes*” (“з глибокою повагою до кмітливого читача”), закінчую оце своє попереднє слово.

Пам'яті моїх Батьків Татіяни та Миколи,
моїх перших вчителів у школі с. Переволочна
Михайла та Софії Кудрич,

гімназійних вчителів Юліяна Редька, Юрія Мушака,
Івана Барана, Івана Паука, Ярослава Калка, Михайла
Саврука, отців Аполонія Сімовича, Михайла Левенця,
Онуфрія Іванюка,

а також професорсько-викладацького складу гео-
дезичного факультету Львівського політехнічного Інсти-
туту в особах Миколи Мигаля, Олексія Лисичанського,
Андрія Моторного, Олександра Заводовського, Павла
Бугая оцю скромну працю присвячую.

Насамкінець висловлюю щиру вдячність працівни-
кам кафедри фотограмметрії та геоінформатики Інституту
геодезії Національного університету “Львівська політех-
ніка”, яку очолює професор О. Л. Дорожинський, за ста-
ранне рецензування рукопису, а також усім, хто сприяв
виходу підручника в світ.

Автор

Структура підручника

Архітектоніка підручника практично не відрізняється від послідовності матеріалу, у класичних підручниках цього курсу: спершу розглянуто питання, які стосуються загальної теорії картографічних проєкцій, після чого викладено вже теорію окремих класів проєкцій.

Підручник складається зі вступу і тринадцяти неоднакових за обсягом розділів. Подам короткі відомості про його зміст.

У вступній частині наведено визначення математичної картографії, її місця і ролі в картографії як науці взагалі та в царині математичного обґрунтування карт зокрема.

Короткий історичний нарис допомагає простежити хід розвитку математичної картографії та використання її досягнень під час укладання карт. Закінчує вступну частину питання про проблеми і завдання, що постають перед сучасною математичною картографією.

Перший розділ містить відомості про фігуру Землі як об'єкт зображення на площині, про її поверхню, параметри еліпсоїда, які характеризують цю фігуру, про картографічну проєкцію, що дає можливість зобразити земну поверхню на площині, та спотворення, що виникають внаслідок такого зображення. Закінчується розділ розглядом питання про умови зображення поверхні еліпсоїда (кулі) на площині.

Позаяк для зображення поверхні еліпсоїда на площині часто використовують попереднє зображення цієї поверхні на кулі, після чого вже кулю зображають на площині, то в другому розділі розглянуто способи зображення поверхні еліпсоїда на кулі з дотриманням відповідних умов зображення.

У третьому розділі подано відомості про картографічні проєкції та їх класифікацію за різними ознаками. Розділ закінчується розглядом питань про скісну і поперечну системи сферичних координат і визначення координат полюсів і точок земної поверхні в цих системах.

Починаючи з четвертого розділу, викладено уже теорію окремих класів проєкцій. У четвертому розділі розглянуто циліндричні проєкції, у п'ятому розділі – конічні, у шостому – азимутні. Сьомий та восьмий розділи містять відомості про псевдоциліндричні, псевдоконічні, псевдоазимутні проєкції. Розгляд кожного класу проєкцій починається із загальних відомостей про них з поданням вихідних формул. У дев'ятому і десятому розділах розглянуто колові й похідні проєкції. Одинадцятий розділ стосується так званих геодезичних проєкцій, тобто проєкцій, які використовують під час опрацювання геодезичних вимірювань.

Дванадцятий розділ – підсумковий, узагальнювальний. У ньому подано відомості про топографічні карти, їх розграфлення і номенклатуру, а також про вибір проєкції для конкретної карти, про розпізнавання проєкцій. Закінчується розділ відомостями про навігаційні карти та їх проєкції.

Розділ тринадцятий має назву “Доповнення. Практична частина”. Перше питання, розглянуте в цьому розділі, стосується точності обчислень, які доводиться виконувати, щоб одержати координати вузлових точок картографічної сітки та інші характеристики проєкції. Далі подано приклади розв’язання окремих задач, що стосуються дослідження картографічної проєкції як за виглядом її сітки меридіанів і паралелей у зображенні, так і за вихідними рівняннями. У цьому розділі наведено приклади обчислення координат і побудови картографічних проєкцій, які можуть бути корисні студентам під час розв’язання аналогічних задач, окреслених програмою цієї навчальної дисципліни.

Кожний розділ закінчується переліком питань, на які слід дати відповіді, щоби впевнитись, наскільки глибоко засвоєно зміст розділу, що, безперечно, сприятиме якісному вивченню курсу.